Interpretare e gestire le risposte degli alunni nelle attività con la matematica

In *La matematica e la sua didattica*, 2000, n°4, pp.423-437, Pitagora, Bologna

Maria Polo[1]
Dipartimento di matematica e CRSEM, Cagliari

Premessa

La situazione di riforma attualmente in atto nella Scuola italiana vede impegnati, con responsabilità, ruoli e coinvolgimenti diversi, esperti, dirigenti, insegnanti e alunni in attività progettuali che mirano ad una riqualificazione della formazione iniziale dalla Scuola materna fino all'Università. Il lavorare per Progetti è diventato terreno comune di confronto e spesso di scontro a tutti i livelli: il ministero progetta e mette in opera il nuovo Esame di Stato, finanzia interventi contro la "dispersione", per la "continuità didattica"; il singolo Istituto realizza il suo Progetto Educativo; ciascun insegnante è promotore ed attore in progetti finalizzati messi in opera a livello di Istituto o del singolo Consiglio di classe. Infine, anche l'attività in classe vede gli alunni impegnati ad elaborare e realizzare il proprio progetto[2].
Il fervore ingenerato nella messa in opera di tante iniziative ha positivamente rianimato, anche se spesso con poca organicità, il clima di lavoro nelle nostre scuole ma ha evidenziato un aspetto problematico[3] che è all'origine della nascita stessa dell'Istituzione Scuola: quale posto si intende assegnare alla formazione culturale, alla costruzione delle conoscenze e dei saperi? Quali legami esistono, o potrebbero esistere, tra la messa in opera di Progetti e l'apprendimento dei saperi?
In questo articolo vengono analizzati l'incontro e/o lo scontro tra il *progetto*[4] dell'insegnante e quello dell'alunno, con l'obiettivo di focalizzare la complessità, ed anche la necessità, di una gestione delle attività in classe con la matematica che privilegi un apprendimento consapevole e motivante dei saperi.

1. Il progetto dell'insegnante e il progetto dell'alunno a confronto

Ogni attività in classe può essere analizzata in termini di interazione sociale. Secondo la corrente dell'interazionismo simbolico le situazioni e le istituzioni non esistono al di fuori delle interazioni sociali: "Il *comportamento umano* non è una semplice reazione all'ambiente umano ma un *processo interattivo di costruzione di questo ambiente*"[5]. L'interazione sociale che qui vogliamo prendere in considerazione è quella che lega l'insegnante, l'alunno e il sapere, cioè la *relazione didattica*[6]. Focalizziamo quindi, l'insieme delle aspettative reciproche che l'insegnante e l'alunno hanno nei confronti della matematica, alla scala temporale di episodi riscontrabili in una singola attività in classe. Tali aspettative sono caratteristiche e in sè costitutive del progetto dell'insegnante e di quello dell'alunno nei confronti del sapere:

---

[1]Lavoro eseguito nell'ambito del co-finanziamento MURST-1997. L'articolo ripropone il testo della relazione generale tenuta tenuta dall'autore al Convegno "Matematica e didattica: come privilegiare l'apprendimento" - Incontri con la Matematica n°13, Castel San Pietro 5-6-7 Novembre 1999.

[2] Si pensi al ruolo attribuito al lavoro individuale dello studente nel nuovo Esame di Stato.

[3]In [13] si ritrova una analisi di tale aspetto problematico.

[4]Il termine *progetto* è utilizzato secondo una accezione ampia: "idea", "previsione", "disegno" (in senso figurato) di una attività, di un lavoro, di un compito.

[5]Il punto di vista, da noi qui condiviso ed evidenziato con la sottolineatura in corsivo, è quello di Sarrazy B., 1998, p.138.

[6]Dal punto di vista sistemico, col termine *relazione didattica* si identifica, nell'insieme delle relazioni che legano a tutti i livelli l'insegnante e l'alunno in situazione scolastica, quella che è specificatamente relativa ad un sapere disciplinare. Gli elementi "Insegnante" (I) e "Alunno" (A) non sono quindi definiti in funzione di titoli particolari di natura istituzionale, ma in funzione delle loro *posizioni reciproche* rispetto ad un fissato "Sapere" (S) che è l'oggetto della relazione didattica in una data situazione. Quest'ultima assume il ruolo di modello della pratica didattica, cioè delle situazioni reali di lavoro il classe. Cf. Lai-Polo,1999 p.42.

> "Il professore ha l'obbligo sociale di *insegnare*[7] tutto ciò che è necessario a proposito di un sapere. L'alunno - soprattutto quando è in difficoltà - glielo chiede. Cosi quindi, più il professore cede a queste domande e svela ciò che desidera, più dice esattamente all'alunno *ciò* che egli deve fare, più rischia di perdere delle occasioni per ottenere e per constatare oggettivamente l'apprendimento al quale deve mirare. (...) tutto ciò che egli intraprende perché l'alunno produca i comportamenti che egli attende, tende a privare quest'ultimo delle **condizioni**[8] necessarie alla comprensione ed all'apprendimento della nozione mirata: se il maestro dice ciò che vuole, non può più ottenerlo. Ma anche l'alunno è davanti ad una ingiunzione paradossale: se egli accetta che (...) l'insegnante gli insegni il risultato, non lo stabilisce da solo e quindi non impara la matematica, non se ne appropria. Se, al contrario, rifiuta qualunque informazione da parte del maestro, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere implica per l'alunno che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e che si sforzi di rifiutarla." (Brousseau, 1986, RDM, p.66)

La *posizione "Insegnante"* e la *posizione "Alunno"* vengono così a trovarsi, per ogni progetto di insegnamento di un nuovo sapere, in una situazione contraddittoria, che sembrerebbe paradossale. Tale contraddizione, precisa Brousseau, viene superata perché "**il sapere e il progetto di insegnamento devono progredire come dietro una maschera**" (ibidem). Infatti, secondo la teoria costruttivista (o più in generale socio-costruttivista) della costruzione delle conoscenze, solo questa "finzione" consente all'insegnante di insegnare e all'alunno di apprendere un sapere. Una metafora ci aiuterà a esplicitare i termini di questa finzione.

2. Il lavoro dell'insegnante: la metafora del cruciverba

Uno degli aspetti più complessi del lavoro dell'insegnante consiste nel costruire e poi gestire delle attività che siano da un lato motivanti per l'alunno e dall'altro funzionali all'apprendimento dei contenuti matematici che "devono" essere insegnati. Consideriamo l'ideazione e la risoluzione di un cruciverba come metafora di tale aspetto del lavoro dell'insegnante.

> Per l'ideazione e la costruzione di un cruciverba, si devono scegliere ed identificare i termini e le definizioni corrispondenti che andranno ad incastrarsi opportunamente per formare un tutt'uno del cruciverba (per un numero fissato di termini e definizioni si possono costruire: il cruciverba facilitato, il cruciverba senza schema, a schema

---

[7] In corsivo nell'originale; Traduzione e sottolineatura in grassetto dell'autore.

[8] A livello teorico è possibile distinguere tre tipi di situazione in funzione della natura diversa della *relazione didattica*. Nella pratica si potrà identificare la coesistenza delle tre tipologie in relazione a condizioni diverse di funzionamento di più saperi in gioco.

- Situazione non-didattica

  Diciamo che una situazione è non-didattica, relativamente ad un sapere s se tale situazione non è esplicitamente organizzata per permettere l'apprendimento di s

Per esempio, a livello della scuola media possono considerarsi non-didattiche le situazioni concernenti le quattro operazioni in N.

- Situazione didattica

  Diciamo che una situazione è didattica, relativamente ad un sapere s se in tale situazione è introdotta un relazione didattica che attribuisce agli elementi I ed A le posizioni rispettive di Insegnante e Alunno nei confronti di s.

Hanno il carattere di situazione didattica relativa ad s, tutte le situazioni di lavoro in classe nelle quali l'insegnante si propone di insegnare s e l'alunno è tenuto ad apprendere s

Accettare l'ipotesi delle Teorie sociocostruttiviste necessita la definizione del terzo tipo di situazione

- Situazione a-didattica

  Diciamo che una situazione è a-didattica relativamente ad un sapere s, se contiene le condizioni per poter essere vissuta dall'alunno indipendentemente dall'elemento insegnante.

Le azioni che l'alunno compie, le risposte e le argomentazioni che fornisce devono essere funzione del suo rapporto (non totalmente esplicito) con il sapere s, cioè con "il problema" che deve risolvere, o con "la difficoltà" che deve superare. Si può innescare in questo caso un *processo di devoluzione* all'alunno di una responsabilità nei confronti del sapere s. (Polo M., 1999)

> libero, ecc.). Chiunque abbia risolto almeno un cruciverba sa che nel giocare si possono imparare dei termini nuovi, collegando le parole costruite alle rispettive definizioni, ma anche completare "involontariamente" (e correttamente) tutto il cruciverba senza aver collegato qualche termine alla relativa definizione. La possibilità durante il "gioco", o una volta "finito il gioco", di rivedere le definizioni delle parole completate in questo modo è lasciata alla curiosità e all'iniziativa individuale; quando si volesse diventare più "esperti" nel risolvere cruciverba l'aver avuto questa iniziativa potrebbe rivelarsi determinante.

Come per l'ideazione di un cruciverba, una parte del lavoro dell'insegnante consiste nel programmare una attività nella quale *attraverso la risoluzione di un problema*[9] gli alunni acquisiscano delle conoscenze e poi dei saperi, nel nostro caso contenuti o concetti matematici (secondo la metafora: la acquisizione di uno o più termini che non facevano parte del vocabolario del risolutore prima di "risolvere il cruciverba"). Come per i termini inseriti nel cruciverba da chi gioca, anche nella pratica didattica, una risposta può essere data implicitamente dalle condizioni della attività e non essere quindi necessariamente il segno di una conoscenza acquisita e/o già posseduta. Ciò avviene quando la risposta è frutto di influenze delle condizioni di lavoro o di azioni ripetute che non hanno necessariamente un nesso diretto con il sapere. E' quindi importante che, nel mettere in opera l'attività come segmento del suo progetto di insegnamento, l'insegnante tenga presente quale sarà il senso che l'alunno attribuirà alla stessa attività, cioè quali risposte (anche implicite e/o inconsce) egli darà alla domanda (pure implicita e/o inconscia): perché e cosa sto facendo? (secondo la metafora: riuscire a completare il cruciverba è il senso di questo gioco; può giocare chiunque abbia il numero minimo di conoscenze sul come e cosa significa risolvere un cruciverba; il significato che attribuisce al gioco chi gioca "maschera" il processo di acquisizione di nuovi termini che potrebbe essere il risultato dell'aver giocato - il potrebbe è evidentemente relativo ad almeno due condizioni in cui si trova chi "gioca": il vocabolario a disposizione e le modalità del giocare).

Il lavoro dell'insegnante che voglia privilegiare un apprendimento consapevole e motivante per l'alunno, non può prescindere dalla presa in considerazione *del significato che il vissuto in classe* assume agli occhi dell'alunno. In particolare si deve tenere conto che le risposte che l'alunno fornisce e le domande che si pone, o che pone all'insegnante o ai compagni, sono sempre il risultato della *sua interpretazione* di ogni singola situazione. *Tale interpretazione viene costruita* nel momento stesso in cui l'attività è vissuta e concorre essa stessa allo sviluppo dell'attività e quindi al *progetto* dell'alunno. I criteri interpretativi che il singolo alunno si costruisce (con gradi diversi di consapevolezza) sono il risultato del suo rapportarsi alla scuola nel tempo, fin dalle prime situazioni vissute a livello di scuola materna.
Il *controllo*[10] delle risposte degli alunni è un aspetto importante della gestione delle attività in classe. Esaminiamo brevemente la complessità della analisi di tali risposte dal punto di vista del processo di apprendimento dei saperi.

3. Individuare la natura delle risposte degli alunni

Numerosi studi[11] hanno messo in evidenza la difficoltà che gli insegnanti incontrano nel porre rimedio agli *errori* degli studenti; "possiamo capire come mai interventi che si limitano a correggere il prodotto sbagliato e a sostituirlo con quello corretto, eventualmente riproponendo il processo corretto sono destinati al fallimento" infatti "se l'errore è dovuto a *convinzioni distorte*[12], una correzione che voglia essere efficace dovrà prima esplicitare e poi rimuovere tali convinzioni; in caso contrario l'errore si ripresenterà puntualmente, magari in contesti diversi"

---

[9]Tralasciamo la complessità di questo aspetto. Alcune considerazioni sulla matematizzazione in termini di *artefatto culturale* si trovano in [3].

[10]Il termine è da intendersi nel senso di analisi, interpretazione e gestione, e non di valutazione.

[11]I risultati di alcuni questi studi in ambito nazionale sono riportati in [1] e [10].

[12]R Zan, 1998, caratterizza tipologie di errori come: interpretazione distorta di algoritmi, di termini e simboli specifici, di concetti.

[R.Zan, 1998, p.19]. Tali convinzioni distorte possono essere il risultato di azioni ripetute, nel vissuto scolastico o anche extra scolastico dell'alunno, che assumono (implicitamente e spesso in modo inconscio per chi le produce) il ruolo di "regole di comportamento stabili".

Ad esempio errori ricorrenti nel caso di problemi che necessitano la moltiplicazione sono dovuti alla convinzione distorta che "moltiplicando due numeri si *deve* ottenere un numero che è *sempre* maggiore di entrambi". L'instaurarsi di questa convinzione distorta può essere interpretata come il risultato di *azioni ripetute*, o regole, che hanno il loro dominio di validità nell'ambito della moltiplicazione in N e che *non sono state messe in crisi* nel passaggio alla moltiplicazione in Q, assumendo così il carattere di "*regole stabili*".

Nell'ottica di una analisi più fine delle risposte, vogliamo ora mettere in evidenza come *anche alcune risposte "considerate esatte"*, possono generare una *convinzione distorta* che può essere all'origine di difficoltà e/o errori in altri contesti e in tempi diversi del percorso di apprendimento degli alunni. L'esempio seguente, emblematico di questa possibilità, è tratto dalla mia esperienza, come insegnante di analisi matematica al primo anno della facoltà di Ingegneria, nella quale ho riscontrato in più episodi situazioni analoghe a quella qui riportata.

Nella prova scritta ho proposto quesiti come quello qui riportato sulla Classe delle funzioni integrabili secondo Riemann.

Determinare un intervallo a,b in cui $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}} & \text{per } x=3-\dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-2} & \text{per } x\neq 3-\dfrac{1}{n^2} \end{cases}$ sia integrabile secondo Riemann, spiegando il perché. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$.

Inizialmente molte risposte degli studenti, prescindendo dalla ricerca di un opportuno intervallo, si limitavano al calcolo di due integrali definiti $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$ e $\int_a^b \frac{e^{2x}}{e^{2x}-2}dx$. Via via, si è diffuso un comportamento che ha "ricondotto" tale risposta a quella corretta. A questo risultato apparentemente positivo ha fatto seguito l'episodio seguente che ho riscontrato ripetutamente durante il ricevimento studenti. Quasi tutti gli studenti in difficoltà ponevano domande del tipo :"E' vero che dobbiamo calcolare l'integrale della funzione dove c'è il segno di $\neq$?". Ho quindi appurato nel ripetersi di questo episodio come la risposta "considerata" corretta poteva non essere fondata sul *senso* del sapere dal punto di vista matematico, ma solo il frutto del diffondersi tra gli studenti di un comportamento basato sulla regola "si deve calcolare *solo l'integrale della funzione dove c'è il segno di* $\neq$, rinforzata dal fatto che *ripetutamente* nelle correzioni delle prove scritte gli studenti riscontravano il *successo* della applicazione di questa regola.

L'esempio mostra come, dal punto di vista dell'insegnante, sia talvolta difficile se non impossibile distinguere, anche nelle risposte corrette, l'utilizzazione pertinente del sapere. La complessità dell'analisi delle risposte degli alunni, ci pone come insegnanti di fronte alla necessità di prevedere, individuare e distinguere non solo la natura delle risposte errate o "considerate errate" ma anche delle risposte corrette o "considerate corrette".

4. Prevedere e gestire gli errori e/o le risposte degli alunni

Nella pratica didattica una delle preoccupazioni degli insegnanti è quella di impedire che gli alunni commettano errori. Con una espressione forte Chevallard afferma che "il potere dell'insegnante in classe consiste più nel suscitare la risposta corretta (che implicitamente classifica le altre come scorrette) che nel designare le risposte scorrette." [Chevallard, 1985]

In un caso che ripropone una situazione frequente dell'insegnamento della matematica a livello di scuola superiore, Chevallard distingue le *risposte possibili* rispetto al sapere "scomposizione in fattori" da quelle abitualmente attese dall'insegnante nell'esempio seguente:

> A livello del biennio della scuola superiore, alla domanda "scomponi in fattori $16x^2 - 4$", l'insegnante si aspetta che l'alunno riconosca la possibilità di utilizzare il "prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$" . Ma davanti alla domanda "scomponi in fattori $4x^2 - 36x$" l'alunno dovrà riconoscere una fattorizzazione semplice $4x^2 - 36x = 4x(x-9)$.
>
> «L'alunno che, alla domanda "scomponi in fattori $4x^2 - 36x$" rispondesse:
>
> $$4x^2 - 36x = 4x^2 - 2(2 \cdot 9)x + 9^2 - 9^2 =$$
>
> $$(2x-9)^2 - 9^2 = (2x-9+9)(2x-9-9) = 2x(2x-18)$$
>
> darebbe una risposta "falsa" per due ragioni: non ha fatto ciò che ci si aspettava da lui; la risposta "giusta" è $4x^2 - 36x = 4x(x-9)$. Egli avrebbe dimostrato così: una capacità poco comune (per un alunno di questo livello scolastico) di riconoscere delle forme algebriche; una incapacità di riconoscere il tipo di situazione problema che si trovava di fronte» (Chevallard, 1985, p.50)

L'esempio mostra come alcune delle risposte possibili possano essere eliminate o avere poche possibilità di apparire, non perché non siano pertinenti dal punto di vista matematico ma perché ritenute "fuori luogo", nella interpretazione della situazione da parte dell'alunno, rispetto alle attese "implicite" dell'insegnante. Queste possono determinare nell'alunno un implicito criterio di comportamento che contribuisce alla costruzione da parte dell'alunno di *convinzioni distorte*. Le azioni ripetute[13], diventate "regole stabili", possono generare una *riduzione del senso del sapere, in questo esempio la scomposizione in fattori*, che può essere all'origine di difficoltà e/o errori in altri contesti e in tempi diversi del percorso di apprendimento degli alunni[14] .

Diventa quindi importante spostare l'attenzione dal ruolo attribuito specificatamente all'errore alla necessità per l'insegnante di **prevedere, individuare la natura e gestire le risposte degli alunni**, siano esse attese o non attese, ritenute giuste o sbagliate, o ancora giuste o sbagliate. Per questo motivo esaminiamo come ogni risposta relativa ad un sapere che l'alunno fornisce **può essere collegata a due *condizioni delle attività in classe* di natura differente**, rispettivamente caratterizzate da un sapere che è *acquisito* o da un sapere che è *in fase di costruzione*.

- **Il sapere è in fase di costruzione**

Secondo la teoria costruttivista, se il sapere è **in fase di costruzione**, la *destabilizzazione di uno dei "sensi del sapere"* è una fase necessaria e costitutiva del processo di costruzione delle conoscenze. L'errore, la difficoltà o la risposta non attesa sono in questo caso l'indice dell'instaurarsi di una fase necessaria del processo di costruzione della conoscenza (cioè del *senso del sapere*). L'alunno che dà la risposta "errata" (o non attesa dal punto di vista dell'insegnante) è in una fase di disequilibrio e un processo di assimilazione/accomodamento, rispetto ad una nuova conoscenza, può innescarsi.

> Per esempio, la risposta "0,8<0,532, identificabile come errore ricorrente negli alunni della scuola elementare e media in attività di approccio ai numeri razionali, può essere l'indice di una conoscenza in fase di costruzione. L'alunno che fornisce tale risposta utilizza la strategia di base del confronto tra naturali che non ha più il suo dominio di

---

[13] Le azioni ripetute nel caso della "scomposizione in fattori" negli esercizi sui prodotti notevoli sono importanti per la memorizzazione degli stessi ma possono indurre negli studenti la convinzione che "se la forma del polinomio è di un tipo si *deve* rispondere in un certo modo". La ricerca della risposta può allora coincidere con lo sforzo mnemonico di ricerca di "esercizi analoghi".

[14] La scomposizione *non attesa* dell'esempio si potrà rivelare quella pertinente per esempio negli esercizi di decomposizione di funzioni razionali fratte nella risoluzione degli integrali o ancora nel riconoscimento di equazioni di curve notevoli, ad esempio l'equazione di una circonferenza non centrata nell'origine del sistema di riferimento.

validità se applicata per analogia alla parte decimale del numero razionale. Si è instaurata, in questo caso, una situazione di conflitto tra le conoscenze possedute e quelle in fase di costruzione[15]

Davanti a risposte di questo tipo l'insegnante può prendere due decisioni differenti, durante l'attività in classe tali decisioni sono istantanee e spesso inconsce, **rilevare l'errore ed esplicitarlo all'alunno**, ed in questo caso la decisione interrompe nell'alunno la situazione di conflitto e rinvia la costruzione della nuova conoscenza. Oppure, **rilevare l'errore e tenerlo per sé**. Con questa seconda decisione, l'insegnante, non esprime giudizi sull'errore (percepibili dall'alunno) ma accetta che l'alunno sbagli e incoraggia la ricerca di altre risposte, ristrutturando le condizioni della situazione che permettano tale ricerca. Ciò può favorire l'innescarsi di un processo di *devoluzione all'alunno di una responsabilità nei confronti del sapere*, e permettere la costruzione della nuova conoscenza.

- **Il sapere è acquisito**

Se il sapere è acquisito**,** l'alunno può non dare alcuna risposta o dare una risposta non attesa o considerata errata dall'insegnante perché le *condizioni della situazione* lo hanno influenzato (in modo implicito) conducendolo a fornire una risposta non sulla base del suo rapporto con il sapere in gioco (cioè con le sue conoscenze) ma sulla base della sua interpretazione della attività e delle domande a cui deve rispondere.
Illustriamo questa situazione con i due esempi seguenti, tratti da [Cobb, 1985] e [Polo, 1996]

Esempio 1 : un'esperienza in seconda elementare

Scenetra frequenta la seconda elementare. La sua insegnante vuole verificare se la bambina è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Scrive quindi, una sotto l'altra le due espressioni

$$34 + 9 = 43$$
$$34 + 11 =$$

Invitata a completare la seconda espressione. Scenetra incolonna 34 e 11 ed esegue l'addizione. Alla domanda esplicita: "Ma potevi utilizzare il risultato della prima espressione?" la bambina risponde di no, quasi turbata.
Fortunatamente l'insegnante e l'assistente presente alla sessione, Marva, insistono. Così l'insegnante chiede: "Secondo te, come avrebbe fatto Marva?" E Scenetra semplicemente: "Avrebbe aggiunto 2 a 43."

Se si mettono in relazione la prima e la seconda risposta date da Scenetra, si evidenzia come non sia una "mancanza" di conoscenza ad impedire la risposta che l'insegnante si aspettava come quella che "doveva" essere data. Scenetra pensa di dover utilizzare l'algoritmo della addizione e di non essere "autorizzata" ad utilizzarne un altro che pure dimostra, dopo l'intervento dell'insegnante, di conoscere e di saper utilizzare pertinamente. Cosa sarebbe successo del progetto dell'insegnante (rispetto alle conoscenze di Scenetra) e del vissuto di Scenetra (rispetto a ciò che può/deve, non può/non deve fare un alunno) durante quell'episodio, ma anche come traccia che può segnare e guidare il suo comportamento in altre situazioni analoghe, se l'insegnante non fosse intervenuto con quella particolare decisione di intervento immediato?

[15] In Dodman, 1995, si trova una situazione analoga nel caso della costruzione del linguaggio in una bambina di scuola materna: "Lei [l'insegnante] aveva dato il "compito" di usare tre nastri per creare «una treccia». Dopo parecchia fatica una bambina non c'è riuscita ma ha creato quello che ha definito «una dueccia». (...) Da un punto di vista normativo potremmo analizzare la parola «dueccia» come un errore; non esiste come lessico in nessun dizionario. Ma (...) la bambina dimostra la capacità di generalizzare dai dati di cui dispone per costruirsi in modo creativo un sistema linguistico che sarà in perpetuo sviluppo in base agli stimoli e alle sfide proposti alla sua crescita". ([8], pp.127-128)

Esempio 2: un’esperienza con studenti di primo anno di università

L'analisi dei risultati di un questionario[16] somministrato all'ingresso all'Università (ad indirizzo scientifico) ha confermato la presenza di questo tipo di risposte, nel caso del sapere *sistema di riferimento cartesiano*. Questo sapere è presente nei programmi di matematica di tutti i livelli dalla scuola elementare all'università con la caratteristica di strumento nella risoluzione di differenti situazioni problematiche. Per i contenuti matematici che hanno questa caratteristica predominalmente strumentale l'instaurarsi di regole stabili che influenzano fortemente le risposte degli alunni è un fenomeno frequente[17]. Nel caso dei quesiti relativi al sapere *sistema di riferimento cartesiano* che abitualmente vengono proposti, soprattutto nei libri di testo, si possono identificare diverse situazioni ricorrenti che favoriscono *azioni ripetute* nelle attività in classe e, quindi, *regole di comportamento stabili*:

- La necessità dell'utilizzazione del sistema di riferimento e il tipo di riferimento da utilizzare è esplicitamente dato nella consegna o dal contesto del quesito;
- se il riferimento è dato a livello semiotico, si tratta di ricavare dal grafico le informazioni pertinenti e sufficienti per risolvere il problema, senza bisogno di interventi sul riferimento dato per completarne gli elementi;
- nei problemi che comportano l'utilizzazione di un sistema di riferimento (dato nella sua rappresentazione grafica o da costruire) i numeri utilizzati sono quasi sempre naturali, decimali o relativi (spesso <100)
- i problemi che comportano la scelta di un opportuno sistema di riferimento sono marginali rispetto a quelli in cui viene richiesta esclusivamente l'utilizzazione di un sistema assegnato (quasi sempre il sistema di assi cartesiani ortogonali).

I quesiti proposti nel questionario "rompevano" alcune di queste regole[18] e ciò ha impedito la risposta o ha influenzato gli studenti al "rispetto delle regole".

Ad esempio in un quesito erano presentati i grafici di tre curve disegnati rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, che non riportava esplicitamente i segni relativi all'origine e all'unità di misura. Veniva chiesto di determinare le coordinate dei punti di intersezione delle curve con gli assi e l'equazione delle stesse[19]. Uno studente ha motivato la sua non-risposta scrivendo: "non c'è il sistema di riferimento, impossibile".

Una risposta considerata errata o non data non è in questo caso indicatrice di un sapere non acquisito, ma di un fraintendimento "implicito" tra le attese dell'insegnante e quelle dell'alunno. Lo stesso alunno che ha fornito una non-risposta o una risposta considerata "errata", può essere in grado di fornire la risposta se sollecitato opportunamente dall'intervento dell'insegnante o da una modifica delle condizioni della situazione. L'insegnate deve prevedere e poi gestire, durante l'attività, o in una analisi successiva, questo tipo di risposte per evitare una valutazione errata delle conoscenze possedute dall'alunno.

I due esempi mostrano come il progetto di insegnamento che l'insegnante mette in opera e il vissuto dell'alunno concorrono alla determinazione di un processo nel quale si susseguono, senza sosta, rotture e costruzioni di attese reciproche (quasi sempre implicite) dell'insegnante e dell'alunno nei confronti di un sapere. Quando le attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno

---

[16] I risultati sono presentati in [11] e relativi ad uno studio sul concetto di sistema di riferimento cartesiano nei sistemi scolastici italiano e francese.

[17] Alcuni aspetti di questo fenomeno sono analizzati in [7] e in [9].

[18] Si veda in [11], pp. 222-232.

[19] Le risposte, in termini quantitativi di riuscita o insuccesso, al quesito sulla determinazione dell'equazione della curva sono state rispettivamente: circonferenza, 24-33; parabola, 20-37; retta, 44-14. Osserviamo che il quesito non è tra quelli più abituali nei quali piuttosto si chiede di disegnare il grafico, data l'equazione della curva.

nei confronti del sapere in gioco si "scontrano" l'insegnante è *costretto* a prendere istantaneamente delle microdecisioni che spesso trascurano le aspettative dell'alunno a favore della prosecuzione del progetto di insegnamento.

5. Il contratto didattico come strumento di lettura dell'attività in classe

Abbiamo illustrato alcuni aspetti che caratterizzano la *posizione insegnante* (I) e la *posizione alunno* (A) in funzione di *ciascun sapere (S)*, evidenziando come, durante lo svolgimento delle attività in classe, si costruisce un processo interattivo tra I, A ed S che contribuisce a determinare le condizioni stesse della attività. Questo fenomeno è stato identificato e studiato da G.Brousseau che ne dà la seguente caratterizzazione:

> "(...) l'alunno interpreta la situazione che gli viene presentata, le domande che gli vengono poste, le informazioni che gli vengono fornite, i vincoli che gli vengono imposti, in funzione di ciò che l'insegnante riproduce coscientemente o no, in modo ripetitivo nella sua pratica di insegnamento. Noi ci interesseremo più particolarmente a ciò che, in queste abitudini, è *specifico delle conoscenze* insegnate: chiamiamo «*contratto didattico*» *l'insieme dei comportamenti specifici del maestro che sono attesi dall'alunno e l'insieme dei comportamenti dell'alunno che sono attesi dal maestro*" (Brousseau, 1980, pp.127-128).

Nel processo di insegnamento/apprendimento l'insieme dei comportamenti e delle attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno nei confronti del sapere deve necessariamente contenere degli elementi *impliciti* se tale sapere è in fase di costruzione. Questa prerogativa differenzia il *Contratto didattico* dal *Contratto formativo* che invece identifica *l'insieme delle negoziazioni esplicite* di diritti e doveri reciproci dell'insegnante e dell'alunno al livello dell'interazione Insegnante-Alunno anche indipendentemente dal sapere.

Inoltre se teniamo presente che nelle attività in classe più saperi funzionano contemporaneamente, per ciascuno di essi dobbiamo supporre in atto un diverso *contratto didattico*. Le condizioni nelle quali si sviluppa ciascuna attività in classe determinano un processo continuo di costruzioni e rotture (che spesso avvengono inconsciamente sia da parte dell'insegnante che da parte dell'alunno) di attese reciproche. Dal punto di vista dell'insegnante non si tratta quindi di favorire l'instaurarsi di un buon contratto didattico (o di impedirne uno non buono)[20], ma piuttosto di controllare e gestire consapevolmente tale processo. A tal fine è indispensabile tenere presente che la distinzione tra una situazione di approccio ad un nuovo contenuto o di valutazione di un sapere supposto acquisito è il punto di vista dell'insegnante e non necessariamente nello stesso momento quello dell'alunno.
A quanti di noi non è capitato almeno una volta da studenti di renderci conto di "aver capito" solo successivamente alle lezioni dell'insegnante su un dato contenuto matematico, pur avendo ottenuto "ottimi risultati" rispetto allo stesso contenuto avendo cioè, fino ad allora, sempre "rispettato" quello che a scuola ci veniva chiesto come lavoro da studenti?

E' importante, quindi che l'insegnante, nel momento della programmazione delle attività, cerchi di prevedere gli interventi, le risposte e le attese dei suoi alunni; nella successiva gestione in classe, egli potrà prendere delle decisioni più consapevoli, sulla base di tali previsioni e del vissuto "in atto" degli alunni. Se si rende conto di aver trascurato una "aspettativa" dell'alunno per proseguire nello svolgimento della attività, potrà in seguito riprendere l'aspettativa "trascurata" in un percorso individualizzato nei confronti del singolo alunno (o degli alunni) che sa di aver "disatteso". Se invece si rende conto che l'aspettativa non può essere trascurata, può

[20]Tale fraintendimento è analizzato in [14].

consapevolmente decidere di interrompere il suo progetto per privilegiare l'apprendimento che altrimenti potrebbe risultare interrotto o non adeguato.

I tempi dell'insegnamento e dell'apprendimento hanno ritmi e modalità di sviluppo differenti; nessun insegnante dovrebbe mai dimenticare ciò, soprattutto durante la gestione delle attività in classe.

Conclusione

Abbiamo descritto come il *progetto* dell'insegnante e quello dell'alunno concorrano alla determinazione di un processo nel quale evolvono aspettative e attese reciproche nei confronti di un sapere. Quando i due *progetti* si "scontrano", nella gestione delle attività in classe, l'insegnante è *costretto* a prendere delle decisioni che spesso trascurano le aspettative e il vissuto dell'alunno. In un processo di insegnamento/apprendimento in ambito scolastico, finalizzato ad un apprendimento consapevole e motivante da parte dell'alunno, chi impara in itinere è anche l'insegnante. Solo se l'insegnante tiene conto di ciò può prevedere e controllare meglio le risposte ed anche le domande degli alunni.

Un insegnante di scuola elementare con cui ho lavorato per diversi anni diceva: "un buon insegnante è chi entrando in una classe che non è la sua è capace di "continuare la lezione" interessando gli alunni". La definizione è forse un po' lapidaria, ma contiene gli aspetti fondanti la professione *docente*: la competenza sul piano disciplinare, le conoscenze relative alla trasposizione didattica dei saperi, la capacità di gestire le attività in classe senza trascurare il punto di vista dell'alunno.
In un momento di riforme e di complessità del vivere, dentro e fuori della scuola, come quello che attraversiamo credo che nessuno dei tre aspetti possa essere trascurato. Conservare la sensibilità di saper cogliere ciò che "sta succedendo" in classe è prerogativa fondante del lavoro dell'insegnante se si vuole privilegiare l'apprendimento consapevole e la formazione di persone competenti e positive.

Bibliografia

1. Anichini G., D'Amore B., Apprendere la matematica: errori, difficoltà, conquiste, *Supplemento al n°10 del Notiziario UMI*
2. Bessot A., 1994, *Panorama del quadro teorico della didattica della matematica in Francia*, L'Educazione Matematica, n°2 Maggio 1994, p.37/73, ED. C.R.S.E.M.. Cagliari
3. Bonotto C.. 1999, Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento apprendimento della matematica, *L'Educazione matematica, vol.1, n°2, Giugno 1999, pp.62-95, Ed. CRSEM, Cagliari.*
4. Brousseau G., 1980, *Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire*, Revue de Laryngologie, vol.101, n°3-4, pp.107/131.
5. Brousseau G., 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol.7 n°2 pp.33-115, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble
6. Brousseau G. , 1988, Le contrat didactique : le milieu, *Recherche en didactique des mathématiques*, 9/3, 309-336
7. Chevallard Y.,1985, *La transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
8. Cobb P., 1985, Two Children'n Anticipations, Beliefs, and Motivations, *Educational Studies in Mathematics*, n°16.
9. Dodman M., 1995, Tessere la realtà: ipertesti e ipertestualità, *L'Educazione Matematica*, vol.2, n°3, pp.125-146, Ed. C.R.S.E.M., Cagliari.
10. Lai S.-Polo M., 1999, La dispersione scolastica:, Scuola & Città, n°12, pp, Editrice
11. Mercier A., 1992, *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas de calcul algèbrique*, Thèse dell'Università di Bordeaux I.
12. Pertichino M., Sandri P., Zan R. (a cura di), 1993, *Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà,* Pitagora Editrice Bologna.

13. Polo M., 1996, *Les systèmes scolaires français et italien. Etude didactique et application de mèthodes d'analyse statistique multidimensionnelle,*Thèse dell'Università di Rennes I, IRMAR, Rennes.
14. Polo M., 1999, Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica, *L'Educazione matematica, vol.1, n°1, Febbraio 1999, pp.4-15, Ed. CRSEM, Cagliari.*
15. Russo L., 1998, *Segmenti e bastoncini. Dove sta andando la scuola?*, Feltrinelli
16. Sarrazy B., 1998, Il contratto didattico, *La matematica e la sua didattica*, n°2-1998, p133-175, Pitagora Editrice, Bologna.
17. Zan R., 1998, Dalla correzione degli errori....all'intervento sulle difficoltà, *Supplemento al n°10 del Notiziario UMI*, pp.12-28.